

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ НЕКЛАССИЧЕСКИХ ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВОЛЬТЕРРОВСКОГО ТИПА ВЫСОКОГО ПОРЯДКА

Александр Иванович Кожанов¹
Бахтовар Хурсанкулович Баротов²

^{1,2}Новосибирский государственный университет
Новосибирск, Россия,

¹kozhanov@math.nsc.ru, a.kozhanov@g.nsu.ru
<https://orcid.org/0000-0003-4376-4003>

²b.barotov@g.nsu.ru; <https://orcid.org/0009-0006-8529-0837>

Аннотация

Работа посвящена исследованию разрешимости краевых задач для вырождающихся интегро-дифференциальных уравнений вольтерровского типа высокого порядка, заданных на отрезке $[0, T]$. Особенностью рассматриваемых задач является то, что в граничных точках отрезка $[0, T]$, в которых уравнение вырождается, граничные данные задаются в полном объёме и не снимаются. Цель работы состоит в доказательстве существования и единственности регулярных решений указанных задач, то есть решений, обладающих всеми обобщёнными в смысле С.Л. Соболева производными, входящими в соответствующие уравнения.

Ключевые слова и фразы

вырождающиеся интегро-дифференциальные уравнения вольтерровского типа, краевые задачи, регулярные решения, существование, единственность

Источник финансирования

Работа выполнена при поддержке Математического Центра в Академгородке, соглашение № 075-15-2025-349 с Министерством науки и высшего образования Российской Федерации

Для цитирования

Кожанов А. И., Баротов Б. Х. Краевые задачи для некоторых неклассических вырождающихся интегро-дифференциальных уравнений вольтерровского типа высокого порядка // *Математические труды*, 2026, Т. 29, № 3, С. 149-168. DOI 10.25205/1560-750X-2026-29-3-149-168

Boundary value problems for some nonclassical Degenerate integro-differential equations of volterra type of high order

Alexander I. Kozhanov¹, Bakhtovar Kh. Barotov²,

¹Novosibirsk State University,
Novosibirsk, Russia

²Novosibirsk State University,
Novosibirsk, Russia

¹kozhanov@math.nsc.ru,
a.kozhanov@g.nsu.ru;<https://orcid.org/0000-0003-4376-4003>
²b.barotov@g.nsu.ru;<https://orcid.org/0009-0006-8529-0837>

Abstract

This paper is devoted to the study of the solvability of boundary value problems for degenerate high-order integro-differential equations of Volterra type defined on the interval $[0, T]$. A distinctive feature of the problems under consideration is that at the boundary points of the interval $[0, T]$, where the equation degenerates, the boundary data are specified in full and are not removed. The aim of the paper is to prove the existence and uniqueness of regular solutions to these problems, that is, solutions possessing all derivatives generalized in the sense of S. L. Sobolev, included in the corresponding equations.

Keywords

degenerate integro-differential equations of Volterra type, boundary value problems, regular solutions, existence, uniqueness

Funding

The work is supported by the Mathematical Center in Akademgorodok under Agreement No. 075-15-2025-349 with the Ministry of Science and Higher Education of Russian Federation

For citation

Kozhanov A.I., Barotov B.Kh., Boundary value problems for some nonclassical Degenerate integro-differential equations of volterra type of high order // *Mat. Trudy*, 2026, V. 29, N. 3, P. 149-168. DOI 10.25205/1560-750X-2026-29-3-149-168

Введение

В настоящей работе рассматриваются краевые задачи на отрезке $[0, T]$ для вырождающихся интегро-дифференциальных уравнений вольтерровского типа высокого порядка вида

$$h(t)D_t^{2p}u(t) + c(t)u(t) + \int_0^t R(t-\tau)u(\tau) d\tau = f(t), \quad t \in [0, T], \quad (0.1)$$

а также для близких к ним уравнений с неотрицательной функцией $h(t)$. Здесь $p \in \mathbb{N}$; случай $p = 0$ в работе не рассматривается, так как он сводится к интегральному уравнению Вольтерры второго рода, исследованному ранее (см., например, [1]).

Некоторые краевые задачи для невырождающихся дифференциальных уравнений с оператором старшего порядка по времени рассматривались в работах [2] - [4]. В работах В.Н. Врагова [5], [6] исследовались вырождающиеся уравнения, получающиеся из (0.1) при отсутствии интегрального члена (то есть при $R \equiv 0$) и $p = 1$; при этом были предложены методы, которые впоследствии нашли успешное применение при изучении краевых задач для уравнений типа (0.1) в случае $p > 1$. Эти результаты были развиты и дополнены в работах [7] - [10]. В указанных работах для уравнения (0.1), а также для более общих уравнений со всеми младшими членами были предложены постановки краевых задач и установлены условия, обеспечивающие существование и единственность решений. Существенной особенностью постановок в [5] - [10] является то, что многообразия вырождения освобождаются от задания части граничных условий.

Эффект освобождения многообразий, на которых уравнение вырождается, от несения части граничных данных был впервые чётко зафиксирован в работе М. В. Келдыша [11] и впоследствии многократно проявлялся в постановках краевых задач для различных классов вырождающихся дифференциальных уравнений (эллиптических, эллиптико-параболических, парабола - гиперболических и др.), см. [5] - [10], [12] - [14]. В частности, в работах [11] - [14], а также [15] показано, что при одних условиях корректными являются задачи с (частичным или полным) освобождением многообразий вырождения от граничных данных, тогда как при других условиях корректны постановки без такого освобождения.

В настоящей работе рассматривается именно второй тип постановок: граничные данные на концах отрезка $[0, T]$ задаются в полном объёме независимо от наличия вырождения. Анализ проводится в пространствах Лебега L_2 и Соболева W_2^m ; необходимые определения и свойства функций из этих пространств приведены, например, в монографиях [16] - [18]. Изучаемые уравнения имеют модельный вид; возможные направления обобщения обсуждаются в заключительной части статьи.

§ 1. Постановка задач

Пусть T есть положительное число, $h(t)$, $c(t)$ и $f(t)$ — заданные функции, определенные при $t \in [0, T]$. Далее, пусть p есть натуральное число, D_t^q есть производная $\frac{d^q}{dt^q}$, $q = 0, \dots, 2p$. Определим оператор L его действием на заданной функции $v(t)$:

$$Lv = h(t)D_t^{2p}v(t) + c(t)v(t) + \int_0^t R(t-\tau)v(\tau)d\tau.$$

Краевая задача 1. Найти функцию $u(t)$, являющуюся на интервале $(0, T)$ решением уравнения

$$Lu = f(t) \quad (1.1)$$

и такую, что для нее выполняются условия

$$D_t^q u(t)|_{t=0} = 0, \quad q = 0, \dots, p, \quad (1.2)$$

$$D_t^q u(t)|_{t=T} = 0, \quad q = 1, \dots, p-1. \quad (1.3)$$

Краевая задача 2. Найти функцию $u(t)$, являющуюся на интервале $(0, T)$ решением уравнения (1.1) и такую, что для нее выполняются условия (1.2), а также условия

$$D_t^q u(t)|_{t=T} = 0, \quad q = p+1, \dots, 2p-1. \quad (1.4)$$

Краевая задача 3. Найти функцию $u(t)$, являющуюся на интервале $(0, T)$ решением уравнения (1.1) и такую, что для нее выполняются условия (1.2), а также условия

$$D_t^q u(t)|_{t=0} = 0, \quad q = p-1, \dots, 2p-1, \quad (1.5)$$

$$D_t^q u(t)|_{t=T} = 0, \quad q = 0, \dots, p-2. \quad (1.6)$$

Краевая задача 1 фактически была предложена В.Н. Враговым [5], [6], ее исследованию посвящены работы [7]–[10]. Краевые задачи 2 и 3 предложены в работе [4]. В случае $h(t) \equiv 1$ и $R(t) \equiv 0$ в [4] для этих задач установлены теоремы существования и единственности регулярных решений. Уточним, что, в отличие от постановок задач в работах [5]–[9], постановки настоящей работы не предполагают освобождения множеств $\{t = 0\}$ и $\{t = T\}$ от задания граничных данных при обращении функции $h(t)$ в нуль.

§ 2. Вспомогательные утверждения

Утверждение 2.1. Пусть $R(t) \in C([0, T])$, $|R(t)| \leq Ct^m$ ($m \geq 0$), и $h(t)$ такова, что $t^{2m+1}h^{-2}(t) \in L_1(0, T)$. Тогда для любой функции $v(t) \in L_2(0, T)$, имеющей производную $D_t v \in L_2(0, T)$, и любого $\delta > 0$ выполняется оценка:

$$\left| \int_0^T \left(\int_0^t R(t-\tau)v(\tau)d\tau \right) \frac{1}{h(t)} D_t v dt \right| \leq \delta \int_0^T (D_t v)^2 dt + K(\delta) \int_0^T R_1(t)v^2(t) dt, \quad (2.1)$$

где функция $R_1(t)$ определяется формулой:

$$R_1(t) = \int_t^T \frac{s^{2m+1}}{h^2(s)} ds, \quad K(\delta) = \frac{C^2}{4\delta(2m+1)}.$$

Доказательство. Применяя неравенство Юнга с δ , имеем:

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^T \left(\int_0^t R(t-\tau)v(\tau)d\tau \right) \frac{1}{h(t)} D_t v dt \right| \\ & \leq \delta \int_0^T (D_t v)^2 dt + \frac{1}{4\delta} \int_0^T \frac{1}{h^2(t)} \left(\int_0^t R(t-\tau)v(\tau) d\tau \right)^2 dt. \end{aligned}$$

Оценим интеграл с ядром, используя неравенство Гельдера и условие $|R(t)| \leq Ct^m$:

$$\begin{aligned} \left(\int_0^t R(t-\tau)v(\tau) d\tau \right)^2 & \leq \left(\int_0^t R^2(t-\tau) d\tau \right) \left(\int_0^t v^2(\tau) d\tau \right) \\ & \leq C^2 \frac{t^{2m+1}}{2m+1} \int_0^t v^2(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Подставляя это в исходное неравенство и меняя порядок интегрирования в двойном интеграле (область интегрирования $0 \leq \tau \leq t \leq T$), получим

$$\int_0^T \frac{t^{2m+1}}{h^2(t)} \left(\int_0^t v^2(\tau) d\tau \right) dt = \int_0^T v^2(\tau) \left(\int_\tau^T \frac{t^{2m+1}}{h^2(t)} dt \right) d\tau = \int_0^T R_1(\tau)v^2(\tau) d\tau.$$

Обозначив константу перед интегралом как $K(\delta)$, получаем требуемую оценку (2.1). $\square$

Утверждение 2.2. Пусть $R(t) \in C([0, T])$, $|R(t)| \leq Ct^m$ ($m \geq 0$), а функция $h(t)$ такова, что

$$t^{2m+1+2p-3}[h(t)]^{-2} \in L_1(0, T).$$

Тогда для любой функции $v(t) \in W_2^{2p}([0, T])$, удовлетворяющей условиям

$$D_t^q v(0) = 0, \quad q = 0, 1, \dots, p-1, \quad (2.2)$$

и любого $\delta > 0$ выполняется оценка

$$\begin{aligned} \left| \int_0^T \frac{1}{h(t)} \left(\int_0^t R(t-\tau)v(\tau)d\tau \right) D_t^{2p-1}v dt \right| &\leq \delta \int_0^T (D_t^{2p-1}v)^2 dt \\ &+ K_1(\delta) \int_0^T R_2(t)(D_t^{p-1}v)^2 dt, \end{aligned} \quad (2.3)$$

где

$$R_2(t) = \int_t^T \frac{s^{2m+1+2p-3}}{h^2(s)} ds, \quad K_1(\delta) = \frac{C^2 C_1}{4\delta(2m+1)}.$$

а C_1 — константа из неравенства $v^2(t) \leq C_1 t^{2p-3} \int_0^T (D_t^{p-1}v)^2 dt$.

Доказательство. Применяя неравенство Юнга с δ , имеем

$$\begin{aligned} &\left| \int_0^T \frac{1}{h(t)} \left(\int_0^t R(t-\tau)v(\tau)d\tau \right) D_t^{2p-1}v dt \right| \\ &\leq \delta \int_0^T (D_t^{2p-1}v)^2 dt + \frac{1}{4\delta} \int_0^T \frac{1}{h^2(t)} \left(\int_0^t R(t-\tau)v(\tau)d\tau \right)^2 dt. \end{aligned}$$

Используем условие $|R(t-\tau)| \leq C(t-\tau)^m$ и неравенство Гельдера;

$$\left(\int_0^t R(t-\tau)v(\tau)d\tau \right)^2 \leq \frac{C^2 t^{2m+1}}{2m+1} \int_0^t v^2(\tau)d\tau.$$

Подставляя, получаем

$$\begin{aligned} &\int_0^T \frac{1}{h^2(t)} \left(\int_0^t R(t-\tau)v(\tau)d\tau \right)^2 dt \\ &\leq \frac{C^2}{2m+1} \int_0^T \frac{t^{2m+1}}{h^2(t)} \left(\int_0^t v^2(\tau)d\tau \right) dt. \end{aligned}$$

Меняем порядок интегрирования

$$\int_0^T \frac{t^{2m+1}}{h^2(t)} \left(\int_0^t v^2(\tau)d\tau \right) dt = \int_0^T v^2(\tau) \left(\int_\tau^T \frac{t^{2m+1}}{h^2(t)} dt \right) d\tau.$$

В силу условий (2.2), справедливо

$$v^2(\tau) \leq C_1 \tau^{2p-3} \int_0^T (D_t^{p-1}v)^2 dt.$$

Подставляя и меняя порядок интегрирования, находим

$$\begin{aligned} & \int_0^T v^2(\tau) \left(\int_\tau^T \frac{t^{2m+1}}{h^2(t)} dt \right) d\tau \\ & \leq C_1 \left(\int_0^T \tau^{2p-3} \int_\tau^T \frac{t^{2m+1}}{h^2(t)} dt d\tau \right) \cdot \int_0^T (D_t^{p-1}v)^2 dt. \end{aligned}$$

Меняем порядок интегрирования в двойном интеграле

$$\begin{aligned} \int_0^T \tau^{2p-3} \left(\int_\tau^T \frac{t^{2m+1}}{h^2(t)} dt \right) d\tau &= \int_0^T \frac{t^{2m+1}}{h^2(t)} \left(\int_0^t \tau^{2p-3} d\tau \right) dt \\ &= \frac{1}{2p-2} \int_0^T \frac{t^{2m+1+2p-2}}{h^2(t)} dt. \end{aligned}$$

Введём обозначение

$$R_2(t) = \int_t^T \frac{s^{2m+1+2p-3}}{h^2(s)} ds.$$

Тогда, интегрируя по частям, можно показать, что

$$\int_0^T \frac{t^{2m+1+2p-3}}{h^2(t)} dt = (2p-2) \int_0^T R_2(t) dt.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} & \int_0^T \frac{1}{h^2(t)} \left(\int_0^t R(t-\tau)v(\tau) d\tau \right)^2 dt \\ & \leq \frac{C^2 C_1}{2m+1} \left(\int_0^T R_2(t) dt \right) \cdot \int_0^T (D_t^{p-1}v)^2 dt. \end{aligned}$$

Обозначив константу перед интегралом как $K_1(\delta)$, получаем требуемую оценку (2.3). $\square$

§ 3. Разрешимость краевых задач 1 и 2

Доказательство разрешимости краевых задач 1 и 2 проводится с помощью метода регуляризации и априорных оценок.

Пусть $\{\varepsilon_k\}_{k=1}^\infty$ есть последовательность положительных чисел такая, что $\varepsilon_k \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$. Обозначим через $h_k(t)$ функцию $h(t) + \varepsilon_k$, и через L_k дифференциальный оператор, действие которого на заданной функции $v(t)$ определяется равенством

$$L_k v = h_k(t) D_t^{2p} v + c(t)v + \int_0^t R(t-\tau)v(\tau) d\tau.$$

Для фиксированного $T_0 \in (T, +\infty)$ при $t \in [0, T]$ положим

$$\psi_k(t) = (-1)^{p+1} \left[\frac{1}{h_k(t)} + \frac{(T_0 - t)h'(t)}{h_k^2(t)} \right] c(t) + (-1)^p \frac{(T_0 - t)c'(t)}{h_k(t)}.$$

Пусть выполняется условия

$$h(t) \in W_\infty^1([0, T]), h(t) > 0 \text{ при } t \in (0, T], h(0) = 0, h'(t) \geq 0 \text{ при } t \in [0, T]. \quad (3.1)$$

Теорема 3.1. Пусть выполняются все условия Утверждения 2.1, условие (3.1), а также условия

$$p > 1; \quad (3.2)$$

$$c(t) \in C^2([0, T]), (-1)^{p+1}c(t) \geq 0, (-1)^p c'(t) \geq 0 \text{ при } t \in [0, T]; \quad (3.3)$$

$$t^{2p-1}[h(t)]^{-2} \in L_1([0, T]) \quad (3.4)$$

$$\psi_k(t) - 2K(\delta)R_1(t) \geq \bar{h}_0 > 0 \text{ при } t \in [0, T]. \quad (3.5)$$

Тогда для любой функции $f(t)$ такой, что $[h(t)]^{-1}f(t) \in L_2(0, T)$, краевая задача 1 имеет решение $u(t)$, принадлежащее пространству $W_2^{2p}([0, T])$.

Доказательство. Рассмотрим краевую задачу: найти функцию $u(t)$, являющуюся на отрезке $[0, T]$ решением уравнения

$$L_k u = f(t) \quad (3.6)$$

и такую, что для нее выполняются условия (1.2)-(1.3). Введём параметр $\lambda \in [0, 1]$ и рассмотрим семейство краевых задач

$$h_k(t)D_t^{2p}u + c(t)u + \lambda \left(\int_0^t R(t-\tau)u(\tau)d\tau \right) = f(t)$$

с теми же условиями (1.2)-(1.3). При $\lambda = 0$ задача представляет собой обыкновенное дифференциальное уравнение с невырождающимся оператором ($h_k(t) \geq \varepsilon_k > 0$). Существование и единственность решения в $W_2^{2p}([0, T])$ для этого случая следуют из стандартной теории (см., например, [19, гл. III]).

Покажем, что для семейства краевых задач применим метод продолжения по параметру [19, гл. III, § 14]. Согласно этому методу, получаем, что при фиксированном k краевая задача (3.6), (1.2)-(1.3) имеет решение $u(t)$ такое, что $u(t) \in W_2^{2p}([0, T])$.

Покажем, что для решений $u(t)$ имеют место априорные оценки, с помощью которых можно будет в уравнении (3.6) перейти к пределу

Пусть T_0 есть число из промежутка $(T, +\infty)$. Умножим уравнение (3.6) на функцию $(-1)^{p+1}(T_0-t)[h_k(t)]^{-1}D_t u$ и проинтегрируем по отрезку $[0, T]$. После несложных преобразований получим равенство

$$\begin{aligned} & \frac{2p-1}{2} \int_0^T (D_t^p u)^2 dt + \frac{T_0-T}{2} [D_t^p u(T)]^2 \\ & + \frac{(-1)^{p+1}}{2} \int_0^T \left[\frac{1}{h_k(t)} + \frac{(T_0-t)h'(t)}{h_k^2(t)} \right] c u^2 dt \\ & + \frac{(-1)^p}{2} \int_0^T \frac{(T_0-t)c'}{h_k(t)} u^2 dt + \frac{(-1)^{p+1}(T_0-T)}{2h_k(T)} c(T) u^2(T) \\ & = (-1)^{p+1} \int_0^T \frac{(T_0-t)}{h_k(t)} f D_t u dt \\ & + (-1)^{p+1} \int_0^T \frac{(T_0-t)}{h_k(t)} \left(\int_0^t R(t-\tau) u(\tau) d\tau \right) D_t u dt. \end{aligned}$$

Оценим интегральное слагаемое, содержащее $R(t-\tau)$, с помощью Утверждения 2.1. При выборе достаточно малого $\delta > 0$ получаем:

$$\left| \int_0^T \frac{1}{h_k(t)} \left(\int_0^t R(t-\tau) u(\tau) d\tau \right) D_t u dt \right| \leq \delta \int_0^T (D_t u)^2 dt + K(\delta) \int_0^T R_1(t) u^2(t) dt.$$

Используя условие (3.5), условия (3.2)–(3.4), а также применяя неравенство Юнга к слагаемым с $f(t)$ и неравенство

$$\int_0^T (D_t u)^2 dt \leq M_1 \int_0^T (D_t^p u)^2 dt,$$

получаем первую априорную оценку

$$\int_0^T (D_t^p u)^2 dt \leq M_2 \int_0^T h^{-2}(t) f^2 dt, \quad (3.8)$$

где M_2 зависит только от $h(t)$, $c(t)$, $R(t)$ и числом T .

Из условий (1.2)–(1.3) следует неравенство

$$u^2(t) \leq m_0 t^{2p-1} \int_0^T (D_t^p u)^2 dt, \quad (3.9)$$

с некоторым фиксированным числом m_0 , зависящим только от числа p .

Для получения второй априорной оценки умножим уравнение (3.6) на функцию $[h_k(t)]^{-1} D_t^{2p} u$ и проинтегрируем по отрезку $[0, T]$. В результате получим

$$\int_0^T (D_t^{2p} u)^2 dt + \int_0^T \frac{c(t)}{h_k(t)} u D_t^{2p} u dt + \int_0^T \frac{1}{h_k(t)} \left(\int_0^t R(t-\tau) u(\tau) d\tau \right) D_t^{2p} u dt$$

$$= \int_0^T \frac{f(t)}{h_k(t)} D_t^{2p} u dt.$$

Оценим каждое из слагаемых по отдельности.

Оценка члена, содержащего $c(t)$. Применяя неравенство Юнга с параметром $\delta > 0$, получаем

$$\left| \int_0^T \frac{c}{h_k} u D_t^{2p} u dt \right| \leq \frac{\delta}{2} \int_0^T (D_t^{2p} u)^2 dt + \frac{1}{2\delta} \int_0^T \frac{c^2}{h_k^2} u^2 dt.$$

Используя неравенство (3.9) и первую априорную оценку (3.8), находим

$$\begin{aligned} \int_0^T \frac{c^2}{h_k^2} u^2 dt &\leq \|c\|_\infty^2 m_0 \left(\int_0^T (D_t^p u)^2 dt \right) \int_0^T \frac{t^{2p-1}}{h_k^2(t)} dt \\ &\leq \|c\|_\infty^2 m_0 M_1 K \int_0^T \frac{f^2}{h^2(t)} dt. \end{aligned}$$

Здесь K — постоянная из условия (3.5).

Оценка интегрального члена, содержащего ядро $R(t)$. Вновь применяя неравенство Юнга, имеем

$$\begin{aligned} \left| \int_0^T \frac{1}{h_k} \left(\int_0^t R(t-\tau) u(\tau) d\tau \right) D_t^{2p} u dt \right| &\leq \frac{\delta}{2} \int_0^T (D_t^{2p} u)^2 dt \\ &+ \frac{1}{2\delta} \int_0^T \frac{1}{h_k^2(t)} \left(\int_0^t R(t-\tau) u(\tau) d\tau \right)^2 dt. \end{aligned}$$

В силу условий на ядро $R(t)$ и оценки (3.8) второе слагаемое является конечной величиной, которая может быть оценена через $\int_0^T \frac{f^2}{h^2(t)} dt$ (подробный вывод см. в Утверждении 2.1).

Оценка правой части. С помощью неравенства Юнга получаем

$$\left| \int_0^T \frac{f}{h_k} D_t^{2p} u dt \right| \leq \frac{\delta}{2} \int_0^T (D_t^{2p} u)^2 dt + \frac{1}{2\delta} \int_0^T \frac{f^2}{h_k^2} dt.$$

Таким образом, для решения u краевой задачи 1 справедлива оценка

$$\int_0^T (D_t^{2p} u)^2 dt \leq M_3 \int_0^T \frac{f^2}{h^2(t)} dt, \quad (3.10)$$

где постоянная M_3 определяется исключительно исходными данными задачи: функциями $h(t)$, $c(t)$, $R(t)$ и числом T .

Семейство решений краевых задач (3.6), (1.2)–(1.3) образует последовательность $\{u_k(t)\}_{k=1}^\infty$. Для этой последовательности имеют место равномерные по k априорные оценки (3.8) и (3.10). Из свойства рефлексивности

гильбертова пространства [19] и из теорем вложения [17,18,20] следует, что существуют подпоследовательность $\{u_{k_l}(t)\}_{l=1}^{\infty}$ и функция $u(t)$ такие, что при $l \rightarrow \infty$ имеют место сходимости

$$u_{k_l}(t) \rightarrow u(t) \quad \text{слабо в } W_2^{2p}([0, T]),$$

$$D_t^p u_{k_l}(t) \rightarrow D_t^p u(t) \quad \text{сильно в } L_2([0, T]).$$

Кроме того, из оценки (3.10) следует ограниченность $\{D_t^{2p} u_{k_l}\}$ в $L_2([0, T])$, а $\varepsilon_{k_l} \rightarrow 0$ по построению. Поэтому

$$\|\varepsilon_{k_l} D_t^{2p} u_{k_l}\|_{L_2([0, T])} \leq \varepsilon_{k_l} \cdot \sup_l \|D_t^{2p} u_{k_l}\|_{L_2([0, T])} \rightarrow 0,$$

и, следовательно,

$$\varepsilon_{k_l} D_t^{2p} u_{k_l} \rightarrow 0 \quad \text{слабо в } L_2([0, T]).$$

Из первой и третьей сходимостей следует, что предельная функция $u(t)$ будет принадлежать пространству $W_2^{2p}([0, T])$ и будет представлять собой решение уравнения (1.1). Из второй сходимости следует, что для функции $u(t)$ выполняются краевые условия (1.2)–(1.3). Все это и означает, что функция $u(t)$ является требуемым решением краевой задачи 1. $\square$

Теорема 3.2. Пусть выполняются все условия Утверждения 2.1, а также условия (3.1)–(3.3), (3.5) и

$$h(t) \sim h_0 t^n \quad \text{при } t \rightarrow 0^+, \quad h_0 > 0, \quad 0 \leq n < 2p - 1. \quad (3.11)$$

Тогда краевая задача 1 имеет не более одного решения в пространстве $W_2^{2p}([0, T])$.

Доказательство. Предположим, что $u(t)$ является решением однородной краевой задачи 1 (с правой частью $f(t) \equiv 0$) из пространства $W_2^{2p}([0, T])$. Умножим однородное уравнение (1.1) на функцию $(-1)^{p+1}(T_0 - t)[h(t)]^{-1} D_t u(t)$ и проинтегрируем по отрезку $[\rho, T]$, где $0 < \rho < T$. После применения формулы интегрирования по частям к членам с высшей производной получаем энергетическое равенство:

$$\begin{aligned} & \frac{2p-1}{2} \int_{\rho}^T (D_t^p u)^2 dt + \frac{T_0 - T}{2} [D_t^p u(T)]^2 + I_{\rho} + J_{\rho} \\ & + \frac{(-1)^{p+1}}{2} \int_{\rho}^T h(t) c(t) u^2 dt + \frac{(-1)^p}{2} \int_{\rho}^T \frac{(T_0 - t) c_t(t)}{h(t)} u^2 dt \\ & + \frac{(-1)^{p+1} (T_0 - T)}{2h(T)} c(T) u^2(T) \end{aligned}$$

$$+(-1)^{p+1} \int_{\rho}^T \frac{(T_0 - t)}{h(t)} \left(\int_0^t R(t - \tau) u(\tau) d\tau \right) D_t u dt = 0. \quad (3.12)$$

Здесь

$$J_{\rho} = -\frac{(-1)^{p+1}(T_0 - \rho)}{2h(\rho)} c(\rho) u^2(\rho)$$

обозначает граничное слагаемое в точке $t = \rho$, а I_{ρ} — совокупность внеинтегральных членов, возникших при интегрировании по частям в окрестности $t = \rho$ для членов со старшей производной.

С учётом условий (3.1)–(3.3) и (3.5), а также оценки интегрального слагаемого с функцией $R(t - \tau)$, установленной в Утверждении 2.1, все интегральные слагаемые в левой части (3.12) являются неотрицательными, что позволяет получить требуемую оценку.

Переходим к пределу при $\rho \rightarrow 0^+$. Так как $u(t) \in W_2^{2p}([0, T])$ и удовлетворяет однородным начальным условиям (1.2), то $D_t^k u(0) = 0$ для $k = 0, 1, \dots, p-1$. Следовательно, внеинтегральные слагаемые I_{ρ} стремятся к нулю при $\rho \rightarrow 0^+$.

Рассмотрим граничное слагаемое J_{ρ} . Из условий (1.2) и свойств функций из $W_2^{2p}([0, T])$ следует оценка $|u(\rho)| \leq C\rho^p$. Из асимптотического условия (3.11) имеем $h(\rho) \geq C_0\rho^n$ при малых $\rho > 0$. Поэтому

$$|J_{\rho}| \leq C \frac{\rho^{2p}}{\rho^n} = C\rho^{2p-n}.$$

Так как по условию (3.11) $n < 2p - 1$, то показатель $2p - n > 1$, и следовательно, $\rho^{2p-n} \rightarrow 0$ при $\rho \rightarrow 0^+$. Таким образом, $J_{\rho} \rightarrow 0$ при $\rho \rightarrow 0^+$.

Переходя в равенстве (3.12) к пределу при $\rho \rightarrow 0^+$, получаем

$$\int_0^T (D_t^p u)^2 dt \leq 0.$$

Отсюда следует, что $D_t^p u(t) = 0$ почти всюду на $[0, T]$. Последовательно интегрируя и используя однородные начальные условия $u(0) = D_t u(0) = \dots = D_t^{p-1} u(0) = 0$, приходим к тождеству $u(t) \equiv 0$ на $[0, T]$.

Следовательно, однородная задача имеет только тривиальное решение, что и доказывает единственность решения исходной краевой задачи 1.

Теорема доказана. ■

Теорема 3.3. Пусть выполняются условия (3.1)–(3.5). Тогда для любой функции $f(t)$ такой, что $[h(t)]^{-1}f(t) \in L_2([0, T])$, краевая задача 2 имеет решение $u(t)$, принадлежащее пространству $W_2^{2p}([0, T])$.

Теорема 3.4. Пусть выполняются условия (3.1)–(3.3), (3.5) и (3.11). Тогда краевая задача 2 имеет не более одного решения в пространстве $W_2^{2p}([0, T])$.

Доказательство теорем 3.3 и 3.4 проводится вполне аналогично доказательству теорем 3.1 и 3.2.

§ 4. Разрешимость краевой задачи 3

Исследование разрешимости краевой задачи 3 проведем в случае $c(t) = c$ (общий случай $c = c(t)$ будет отличаться от рассмотренного лишь более громоздкими выкладками). Методы, использованные ниже, будут вполне аналогичны методу, использованному при доказательстве теоремы 3.1.

Теорема 4.1. Пусть выполняются условия Утверждения 2.2, а также условия (3.2) и

$$h(t) \in L_\infty(0, T), \quad ((T - t)h(t))' \in L_\infty(0, T), \quad (4.1)$$

$$h(t) \geq 0, \quad (T - t)h'(t) \leq 0 \text{ при } t \in [0, T], \quad h(T) = 0; \quad (4.2)$$

$$c \in \mathbb{R}, \quad (-1)^p c \leq 0; \quad (4.3)$$

$$(T - t)^{2p-3}[h(t)]^{-2} \in L_1([0, T]). \quad (4.4)$$

$$\frac{(-1)^{p-1}(2p-1)}{2}c - K_1(\delta)R_2(t) \geq \bar{h}_0 > 0 \text{ п.в. на } [0, T], \quad (4.5)$$

Тогда для любой функции $f(t)$ такой, что $[h(t)]^{-1}f(t) \in L_2([0, T])$ краевая задача 3 имеет решение $u(t)$, принадлежащее пространству $W_2^{2p}([0, T])$.

Доказательство. Вновь воспользуемся методом регуляризации. Обозначим через $\tilde{L}_k$ оператор, действие которого на заданной функции $v(t)$ определяется равенством

$$\tilde{L}_k v(t) = h_k(t)D_t^{2p}v(t) + cv(t) + \int_0^t R(t - \tau)v(\tau)d\tau.$$

Рассмотрим краевую задачу: найти функцию $u(t)$, являющуюся на отрезке $[0, T]$ решением уравнения

$$\tilde{L}_k u = f(t) \quad (4.6)$$

и такую, что для нее выполняются условия (1.2), (1.5) и (1.6). Используя метод продолжения по параметру [19], вновь нетрудно показать, что при фиксированном k данная краевая задача имеет решение $u(t)$ такое, что $u(t) \in W_2^{2p}([0, T])$. Покажем, что для решения $u(t)$ имеют место априорные оценки, с помощью которых можно будет в уравнении (4.6) перейти к пределу.

На первом шаге умножим уравнение (4.6) на функцию $(T - t)D_t^{2p-1}u$ и проинтегрируем по отрезку $[0, T]$. Получим равенство

$$\frac{1}{2} \int_0^T h_k(t)(D_t^{2p-1}u)^2 dt - \frac{1}{2} \int_0^T (T - t)h'(t)(D_t^{2p-1}u)^2 dt$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{(-1)^{p-1}(2p-1)}{2} \int_0^T c(D_t^{p-1}u)^2 dt \\
& = \int_0^T (T-t)f D_t^{2p-1}u dt - \int_0^T \left(\int_0^t R(t-\tau)u(\tau)d\tau \right) (T-t)D_t^{2p-1}u dt.
\end{aligned}$$

В силу (4.2) второе слагаемое слева неотрицательно. Из (4.3) следует, что третье слагаемое также неотрицательно. Отбрасывая неотрицательные члены, получаем оценку

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \int_0^T h_k(D_t^{2p-1}u)^2 dt \leq \left| \int_0^T (T-t)f D_t^{2p-1}u dt \right| \\
& + \left| \int_0^T \left(\int_0^t R(t-\tau)u(\tau)d\tau \right) (T-t)D_t^{2p-1}u dt \right|.
\end{aligned}$$

Первое слагаемое справа оцениваем по неравенству Юнга:

$$\left| \int_0^T (T-t)f D_t^{2p-1}u dt \right| \leq \frac{\delta^2}{2} \int_0^T h_k(D_t^{2p-1}u)^2 dt + \frac{T}{2\delta^2} \int_0^T h_k^{-1}f^2 dt.$$

Второе слагаемое оцениваем с помощью Утверждения 2.2. Выбирая δ достаточно малым и используя (4.5), получаем первую априорную оценку:

$$\int_0^T (D_t^{p-1}u)^2 dt \leq M_4 \int_0^T h^{-2}(t)f^2 dt, \quad (4.7)$$

постоянная M_4 которой определяется лишь функцией $h(t)$ и числом T .

Из условий (1.2), (1.5), (1.6) и (4.3) вытекает неравенство

$$u^2(t) \leq m_2(T-t)^{2p-3} \int_0^T (D_t^{p-1}u)^2 dt, \quad t \in [0, T], \quad (4.8)$$

где m_2 зависит только от p и T .

На следующем шаге умножим уравнение (4.6) на функцию $[h_k(t)]^{-1}D_t^{2p}u$ и проинтегрируем по отрезку $[0, T]$

$$\begin{aligned}
& \int_0^T \frac{(D_t^{2p}u)^2}{h_k(t)} dt + c \int_0^T \frac{u}{h_k(t)} D_t^{2p}u dt + \int_0^T \frac{1}{h_k(t)} \left(\int_0^t R(t-\tau)u(\tau)d\tau \right) D_t^{2p}u dt \\
& = \int_0^T \frac{f}{h_k(t)} D_t^{2p}u dt.
\end{aligned}$$

Оценим каждое слагаемое. Член c . По неравенству Гельдера и (4.8):

$$\left| c \int_0^T \frac{u}{h_k(t)} D_t^{2p}u dt \right| \leq |c| \left(\int_0^T \frac{u^2}{h_k^2(t)} dt \right)^{1/2} \left(\int_0^T (D_t^{2p}u)^2 dt \right)^{1/2}.$$

Из (4.8) и (4.7) следует

$$\int_0^T \frac{u^2}{h_k^2(t)} dt \leq C_2 \int_0^T \frac{f^2}{h^2} dt.$$

Тогда для любого $\varepsilon > 0$

$$\left| c \int_0^T \frac{u}{h_k(t)} D_t^{2p} u dt \right| \leq \varepsilon \int_0^T (D_t^{2p} u)^2 dt + C(\varepsilon) \int_0^T \frac{f^2}{h^2(t)} dt. \quad (4.9)$$

Интегральный член. По неравенству Юнга

$$\begin{aligned} \left| \int_0^T \frac{1}{h_k(t)} \left(\int_0^t R(t-\tau) u(\tau) d\tau \right) D_t^{2p} u dt \right| &\leq \frac{\delta}{2} \int_0^T \frac{(D_t^{2p} u)^2}{h_k(t)} dt \\ &+ \frac{1}{2\delta} \int_0^T \frac{1}{h_k(t)} \left(\int_0^t R(t-\tau) u(\tau) d\tau \right)^2 dt. \end{aligned}$$

Второе слагаемое в силу условий Утверждения 2.2 и оценки (4.7) не превосходит $C(\delta) \int_0^T \frac{f^2}{h^2} dt$. Следовательно,

$$\left| \int_0^T \frac{1}{h_k(t)} \left(\int_0^t R(t-\tau) u(\tau) d\tau \right) D_t^{2p} u dt \right| \leq \frac{\delta}{2} \int_0^T \frac{(D_t^{2p} u)^2}{h_k(t)} dt + C(\delta) \int_0^T \frac{f^2}{h^2(t)} dt. \quad (4.10)$$

Далее, по неравенству Юнга:

$$\left| \int_0^T \frac{f}{h_k(t)} D_t^{2p} u dt \right| \leq \frac{1}{2} \int_0^T \frac{(D_t^{2p} u)^2}{h_k(t)} dt + \frac{1}{2} \int_0^T \frac{f^2}{h_k(t)} dt. \quad (4.11)$$

Подставляя (4.9)–(4.11) в исходное равенство и выбирая ε, δ достаточно малыми, после приведения подобных получаем

$$\frac{1}{2} \int_0^T \frac{(D_t^{2p} u)^2}{h_k} dt \leq C_5 \int_0^T \frac{f^2}{h^2} dt.$$

Поскольку $h_k(t) \geq h(t)$, отсюда следует вторая априорная оценка

$$\int_0^T (D_t^{2p} u)^2 dt \leq M_5 \int_0^T \frac{f^2}{h^2(t)} dt, \quad (4.12)$$

где M_5 зависит только от h, c, p, T .

Используя оценки (4.7), (4.12) и свойство рефлексивности гильбертова пространства, нетрудно показать, что существуют подпоследовательность $\{u_{k_l}(t)\}_{l=1}^\infty$ последовательности $\{u_k(t)\}_{k=1}^\infty$ решений краевой задачи (1.2),

(1.5), (1.6), а также функция $u(t)$ такие, что при $l \rightarrow \infty$ имеют место сходимости

$$\begin{aligned} u_{k_l}(t) &\rightarrow u(t) \quad \text{слабо в пространстве } W_2^{2p}([0, T]), \\ D_t^{p-2} u_{k_l}(t) &\rightarrow D_t^{p-2} u(t) \quad \text{сильно в пространстве } L_2([0, T]). \end{aligned}$$

Из этих сходимостей и следует, что предельная функция $u(t)$ будет представлять собой искомое решение краевой задачи 3.

Теорема доказана.

Теорема 4.2. Пусть выполняются все условия Утверждения 2.2, а также условия (3.2) и (4.1)–(4.5). Тогда краевая задача 3 не может иметь в пространстве $W_2^{2p}([0, T])$ более одного решения.

Доказательство. Для решения $u(t)$ краевой задачи 3 из пространства $W_2^{2p}([0, T])$ имеет место неравенство (4.7). Из этого неравенства в случае $f(t) \equiv 0$ и следует требуемое.

Теорема доказана.

§ 5. Комментарии и дополнения

1. Полученные в настоящей работе результаты показывают корректность краевых задач для вырождающихся интегро - дифференциальных уравнений вольтерровского типа вида

$$h(t)D_t^{2p}u(t) + c(t)u(t) + \int_0^t R(t-\tau)u(\tau) d\tau = f(t),$$

в невесовых пространствах Соболева. Корректность обеспечивается, в частности, согласованными условиями на вырождающийся коэффициент $h(t)$, функцию $c(t)$, ядро интегрального члена $R(t-\tau)$ и правую часть $f(t)$.

Отметим, что аналогичные по структуре результаты могут быть получены и для многомерных интегро-дифференциальных уравнений вольтерровского типа с вырождением по времени, когда вместо функции $u(t)$ рассматривается функция $u(x, t)$, $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$, а дифференциальный член по пространственным переменным задаётся эллиптическим оператором второго порядка. При этом схема доказательства сохраняет основные шаги (априорные оценки, регуляризация по $h(t)$, метод продолжения по параметру), а дополнительные трудности связаны главным образом с учётом граничных условий по x и свойств эллиптического оператора.

2. Условия (3.2) и (3.4) теоремы 3.1 (а также соответствующие условия теоремы 4.1) очевидно, выполняются для функции $h(t)$ вида

$$h(t) = t^\alpha, \quad 1 \leq \alpha < p,$$

то есть при вырождении на множестве $\{t = 0\}$. Аналогично, условия (4.1) и (4.2) теорем 4.1 и 4.2 выполняются для функции

$$h(t) = (T - t)^\alpha, \quad 0 < \alpha < p - 1,$$

что соответствует вырождению на множестве $\{t = T\}$. Можно привести и другие примеры вырождающихся коэффициентов $h(t)$, удовлетворяющих указанным асимптотическим и интегральным условиям.

Список литературы

1. Кожанов А. И. Исследование разрешимости некоторых интегральных и интегро-дифференциальных уравнений третьего рода Вольтерровского типа // *Доклады Академии Наук*. 2018. Т. 478, № 3. С. 262–265.
2. Fattorini H. O. The underdetermined Cauchy problem in Banach spaces // *Math. Ann.* 1973. V. 200. P. 103–112.
3. Fattorini H. O. Two point boundary value problems for operational differential equations // *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4)*. 1974. V. 1. P. 63–79.
4. Кожанов А. И., Пинигина Н. Р. Краевые задачи для некоторых неклассических дифференциальных уравнений высокого порядка // *Матем. заметки*. 2017. Т. 101, № 3. С. 403–412.
5. Врагов В. Н. К теории краевых задач для уравнений смешанного типа в пространстве // *Дифференц. уравнения*. 1977. Т. 13, № 6. С. 1098–1105.
6. Врагов В. Н. О постановке и разрешимости краевых задач для уравнений смешанно-составного типа // *Матем. анализ и смежные вопросы математики*. Новосибирск: Наука, 1978. С. 5–13.
7. Егоров И. Е., Федоров В. Е. *Неклассические уравнения математической физики высокого порядка*. Новосибирск: Изд-во ВЦ СО РАН, 1995.
8. Egorov I. E., Fedorov V. E., Tikhonova I. M., Efimova E. S. The Galerkin method for nonclassical equations of mathematical physics // *AIP Conf. Proc.* 2017. V. 1907. Paper No. 020011.
9. Егоров И. Е. О краевой задаче для уравнения смешанного типа со спектральным параметром // *Матем. заметки СВФУ*. 2014. Т. 21, № 1. С. 11–17.

10. Кожанов А. И., Кошанов Б. Д., Султангазиева Ж. Б. Новые краевые задачи для квазигиперболических уравнений четвертого порядка // *Сиб. электрон. матем. изв.* 2019. Т. 16. С. 1410–1436.
11. Келдыш М. В. О некоторых случаях вырождения уравнений эллиптического типа на границе области // *Докл. АН СССР*. 1951. Т. 77, № 2. С. 181–183.
12. Смирнов М. М. *Вырождающиеся эллиптические и гиперболические уравнения*. М.: Наука, 1966.
13. Fichera G. On a unified theory of boundary-value problems for elliptic-parabolic equations of second order // *Boundary Problems in Differential Equations*. Madison, WI: Univ. Wisconsin Press, 1960. P. 97–120.
14. Олейник О. А., Радкевич Е. В. Уравнения второго порядка с неотрицательной характеристической формой // *Итоги науки. Сер. Математика. Мат. анализ*. 1969. М.: ВИНТИ, 1971. С. 7–252.
15. Врагов В. Н. Смешанная задача для одного класса гиперболопараболических уравнений второго порядка // *Дифференц. уравнения*. 1976. Т. 12, № 1. С. 24–31.
16. Врагов В. Н. *Краевые задачи для неклассических уравнений математической физики*. Новосибирск: НГУ, 1983.
17. Соболев С. Л. *Некоторые применения функционального анализа в математической физике*. М.: Наука, 1988.
18. Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н. *Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа*. М.: Наука, 1973.
19. Треногин В. А. *Функциональный анализ*. М.: Наука, 1980.
20. Triebel H. *Interpolation Theory, Function Spaces, Differential Operators*. Berlin: VEB Deutscher Verl. Wiss., 1978.

References

1. Kozhanov A. I. Study of the Solvability of Some Volterra-Type Integral and Integro-Differential Equations of Third Kind *Dokl. Math.* 2018. V. 97, P. 38–41.
2. Fattorini H. O. The underdetermined Cauchy problem in Banach spaces // *Math. Ann.* 1973. V. 200. P. 103–112.

3. Fattorini H. O. Two point boundary value problems for operational differential equations // *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4)*. 1974. V. 1. P. 63–79.
4. Kozhanov, A.I., Pinigina, N.R. Boundary-value problems for some higher-order nonclassical differential equations *Math Notes* 2017. V. 101. P. 467–474.
5. Vragov V. N. On the theory of boundary value problems for equations of mixed type in space // *Differential Equations*. 1977. V. 13, No. 6. P. 1098–1105.
6. Vragov V. N. On the formulation and solvability of boundary value problems for equations of mixed-composite type // *Mathematical Analysis and Related Questions of Mathematics*. Novosibirsk: Nauka, 1978. P. 5–13.
7. Egorov I. E., Fedorov V. E. *Nonclassical Equations of Mathematical Physics of High Order*. Novosibirsk: Publ. House of Comp. Center SB RAS, 1995. (In Russian)
8. Egorov I. E., Fedorov V. E., Tikhonova I. M., Efimova E. S. The Galerkin method for nonclassical equations of mathematical physics // *AIP Conf. Proc.* 2017. V. 1907. Paper No. 020011.
9. Egorov I. E. On a boundary value problem for a mixed-type equation with a spectral parameter // *Math. Notes of NEFU*. 2014. V. 21, No. 1. P. 11–17.
10. Kozhanov A. I., Koshanov B. D., Sultangazieva Zh. B. New boundary-value problems for fourth-order quasihyperbolic equations // *Sib. Elektron. Mat. Izv.* 2019. V. 16. P. 1410–1436.
11. Keldysh M. V. On some cases of degeneration of elliptic equations on the boundary of a domain // *Dokl. Akad. Nauk SSSR*. 1951. V. 77, No. 2. P. 181–183.
12. Smirnov M. M. *Degenerate Elliptic and Hyperbolic Equations*. Moscow: Nauka, 1966. (In Russian)
13. Fichera G. On a unified theory of boundary-value problems for elliptic-parabolic equations of second order // *Boundary Problems in Differential Equations*. Madison, WI: Univ. Wisconsin Press, 1960. P. 97–120.

14. Oleinik O. A., Radkevich E. V. Second order equations with nonnegative characteristic form // *Results of Science. Ser. Mathematics. Math. Anal.* 1969. Moscow: VINITI, 1971. P. 7–252.
15. Vragov V. N. Mixed problem for a class of hyperbolic-parabolic equations of the second order // *Differential Equations*. 1976. V. 12, No. 1. P. 24–31.
16. Vragov V. N. *Boundary value problems for non-classical equations of mathematical physics*. Novosibirsk: NSU, 1983.
17. Sobolev S. L. *Some Applications of Functional Analysis in Mathematical Physics*. Moscow: Nauka, 1988. (In Russian)
18. Ladyzhenskaya O. A., Ural'tseva N. N. *Linear and Quasilinear Equations of Elliptic Type*. Moscow: Nauka, 1973.
19. Trenogin V. A. *Functional Analysis*. Moscow: Nauka, 1980. (In Russian)
20. Triebel H. *Interpolation Theory, Function Spaces, Differential Operators*. Berlin: VEB Deutscher Verl. Wiss., 1978.

Информация об авторах

Александр Иванович Кожанов, доктор физико-математических наук, профессор

SPIN 9132-3234 AuthorID: 2099

Scopus Author ID 55892833300

Бахтовар Хурсанкулович Баротов, аспирант

SPIN 8670-7627 AuthorID: 1236802

Scopus Author ID 59557632200

Author Information

Alexander I. Kozhanov, Doctor of Mathematics, Professor

SPIN 9132-3234 AuthorID: 2099

Scopus Author ID 55892833300

Bakhtovar Kh. Barotov, Postgraduate student

SPIN 8670-7627 AuthorID: 1236802

Scopus Author ID 59557632200

*Статья поступила в редакцию 22.06.2026;
одобрена после рецензирования 18.07.2026; принята к публикации
06.08.2026*

*The article was submitted 22.06.2026;
approved after reviewing 18.07.2026; accepted for publication 06.08.2026*